ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 5

Математическое ожидание

$$E(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)\, dx \qquad E(x) = \langle x \rangle = \sum_k x_k p_k$$

$$y = f(x)$$

$$E(y) = \langle y \rangle = \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x)\, dx$$

$$E(y) = \langle y \rangle = \langle f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{K} f(x_k) p_k$$

$$y = x^n, \quad \text{где} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

начальные моменты:

$$m_x^{(n)} = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x)\, dx$$

центральные моменты:

$$\mu_x^{(n)} = \left\langle \left(x - \langle x \rangle \right)^n \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \langle x \rangle \right)^n w(x)\, dx$$

Математическое ожидание случайной величины x
(первый начальный момент)

$$m_x^{(1)} = E(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx$$

Дисперсия случайной величины x
(второй центральный момент):

$$\sigma_x^2 = \mu_x^{(2)} = D(x) = E\left(\left(x - \langle x \rangle\right)^2\right)$$

$$\sigma_x^2 = \left\langle \left(x - \langle x \rangle\right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \langle x \rangle\right)^2 w(x) dx$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Производящая функция моментов (ПФМ)

$$M_x^{(I)} = \left\langle e^{xu} \right\rangle$$ — ПФМ начальных моментов

$$M_x^{(I)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu} w(x)\,dx \qquad M_x^{(I)} = \sum_k e^{x_k u} p_k$$

$$M_x^{(C)} = \left\langle e^{\left(x - \langle x \rangle\right)u} \right\rangle$$ — ПФМ центральных моментов

$$M_x^{(C)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(x - \langle x \rangle\right)u} w(x)\,dx \qquad M_x^{(C)} = \sum_k e^{\left(x_k - \langle x \rangle\right)u} p_k$$

ПФМ для нормального распределения

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot A} e^{-\frac{(x-B)^2}{2A^2}}$$

$$M_x^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu-\frac{(x-B)^2}{2A^2}} dx$$

$$M_x^{(I)} = e^{\left(\frac{A^2u^2}{2}+uB\right)}$$

$$\left(\text{при расчетах использлвано:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \right)$$

$$\left.\frac{dM_x^{(I)}}{du}\right|_{u=0} = m_x^{(1)} = \langle x \rangle = B \qquad \left.\frac{d^2M_x^{(I)}}{du^2}\right|_{u=0} = m_x^{(2)} = \langle x^2 \rangle = B^2 + A^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \left(\langle x \rangle\right)^2 = A^2 \qquad \sigma_x = A$$

Отсюда обычный вид нормального распределения:

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{или} \quad w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x}e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma_x^2}}$$

ПФМ для начальных моментов:

$$M_x^{(I)}=e^{\left(\frac{\sigma_x^2 u^2}{2}+u\langle x\rangle\right)}$$

ПФМ для центральных моментов:

$$M_x^{(C)}=e^{\frac{\sigma_x^2 u^2}{2}}$$

ПФМ биномиального распределения

$$M_n^{(I)} = \left\langle e^{nu} \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} e^{nu} P_N(n) = \sum_{n=0}^{N} e^{nu} C_N^n p^n (1-p)^{N-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} C_N^n \left(e^u p\right)^n (1-p)^{N-n} = \left(e^u p + 1 - p\right)^N$$

Первый начальный момент:

$$m_n^{(1)} = \left.\frac{dM_n^{(I)}}{du}\right|_{u=0} = N\left(e^u p + 1 - p\right)^{N-1} \left. p e^u \right|_{u=0} =$$

$$= N\left(p + 1 - p\right)^{N-1} p = Np$$

Второй начальный момент:

$$m_n^{(2)} = \left.\frac{d^2 M_n^{(I)}}{du^2}\right|_{u=0} = N(N-1)p^2 + Np$$

Второй центральный момент:

$$\sigma_n^2 = \mu_n^{(2)} = m_n^{(2)} - \left(m_n^{(1)}\right)^2 =$$

$$= N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p)$$

ПФМ распределения Пуассона.

$$M_n^{(I)} = \left\langle e^{nu} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} =$$

$$= e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha t e^u\right)^n}{n!} = e^{-\alpha t} e^{\alpha t e^u} = e^{\alpha t\left(e^u - 1\right)}$$

Первый начальный момент: $m_n^{(1)} = \left.\frac{dM_n^{(I)}}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} e^{\alpha t\left(e^u - 1\right)} = \left. e^{\alpha t\left(e^u - 1\right)} \alpha t e^u \right|_{u=0} = \alpha t$

Второй начальный момент: $m_n^{(2)} = \left.\frac{d^2 M_n^{(I)}}{du^2}\right|_{u=0} = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} e^{\alpha t\left(e^u - 1\right)} \alpha t e^u = (\alpha t)^2 + \alpha t$

Второй центральный момент: $\sigma_y^2 = \mu_y^{(2)} = m_x^{(2)} - \left(m_x^{(1)}\right)^2 = (\alpha t)^2 + \alpha t - (\alpha t)^2 = \alpha t$